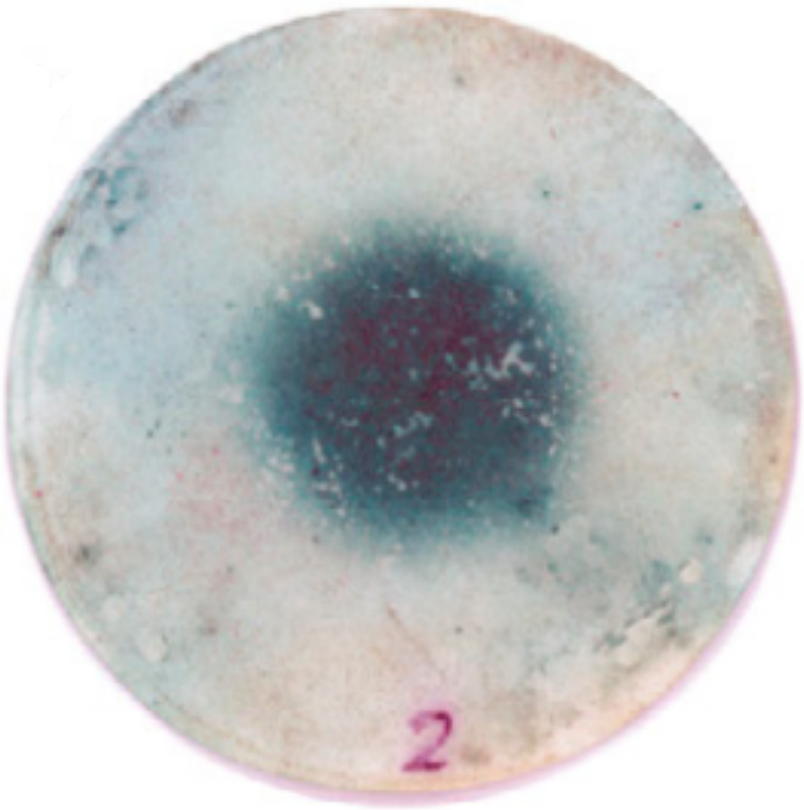
Diffusionsprocessens indflydelse på koncentrationen af fosfor for flere fosforgødningsgranulater i jord



Projekt forskerspirer 2026	
Titel	Diffusionsprocessens indflydelse på koncentrationen af fosfor for flere fosforgødningsgranulater i jord
Identifikationskode	BC029
Navn Olivia Obers	
Gymnasium Gammel Hellerup Gymnasium	
Fagområde	NAT

Indholdsfortegnelse

Indledning *2*

Problemformulering og formål *2*

Afgrænsning *3*

Teori *3*

Fosfor i jorden **3**

Ficks love for diffusion **4**

Diffusion i tre dimensioner **6**

Metode og projektets udførsel *6*

Måling af koncentration af fosfor i et punkt i jorden **6**

Del 1: Eksperimentel bestemmelse af diffusionskoefficienten D for diffusionen af et enkelt fosforgødningsgranulat. **7**

Del 2: Undersøgelse af superpositionsprincippet for koncentrationen af fosfor for to gødningsgranulater **8**

Tidsramme og budget *9*

Konklusion *11*

Tak *11*

Litteraturliste *12*

Bilag *14*

Bilag 1: Visualisering af fosfordiffusionszoner i jord (forside) **14**

Bilag 2: pH-værdiens indflydelse på fosforfiksering **14**

Bilag 3: pH-værdiens indflydelse på fordelingen af fosfatformer i opløsning **15**

Bilag 4: Input til grafer i maple. **16**

Bilag 5: Udregning af lineær sammenhæng for koncentrationen og afstanden for et fast tidspunkt. **16**

Bilag 6: Udregning af D og N ud fra k og b. **17**

Bilag 7: Udregning af udtryk for tiden for måling af undersøgelse for superpositionsprincip **17**

Bilag 8: Udregning af udtryk for den teoretiske koncentration ud fra superpositionsprincippet **17**

Bilag 9: Udregning af udtryk til sammenligning af den målte og teoretiske koncentration ... **18**

Indledning

Fosfor er et essentielt næringsstof for planter, der bruges til adskillige processer. En tilstrækkelig mængde fosfor er nødvendig for vækst og udvikling i planter, og bruges til stort set alle vigtige stofskiftereaktioner. Fosfor øger afgrødens modenhed, reducerer modningstiden og er et vigtigt element i DNA, RNA og fosfolipiderne i cellemembranerne. Dette er blot nogle af fosfors mange funktioner, som kan fremmes betydeligt ved tilsætning af opløselig fosforgødning, der absorberes i planterødderne.

Generelt set er fosfor en af de hyppigste begrænsende faktorer for afgrødekvalitet og plantevækst[1]. Ineffektiv udnyttelse af fosforgødning resulterer i både økonomisk tab og skade på miljøet[2]. Jordens befolkning vokser og vokser, mens jordens landareal forbliver det samme. Optimerende udnyttelse af disse arealer bliver derfor essentielt i fremtiden såvel som nutiden for at sikre adgang til føde for alle, men samtidig skal vi gøre det på en ansvarlig og miljøbevidst måde. Jeg tror, at en bedre forståelse af de fysiske og kemiske processer kan hjælpe til netop dette og ikke kun styrke samfundet økonomisk, men også miljømæssigt.

Selvom vi er nået langt i forskningen, er der stadig mange videnshuller, der begrænser vores forståelse og dermed den mulige effektivisering og forbedring af fosforgødning. Diffusionen af flere fosforgødningsgranulater påvirker klart den samlede koncentration, men præcis hvordan er stadig ikke klart afdækket.

Personligt er jeg dybt passioneret omkring at skabe udvikling, der er til gavn for miljøet og synes, at det er virkelig spændende at undersøge processer, der har afgørende betydning for planter. Dette projekt motiverer mig derfor både fagligt og personligt, og jeg håber at kunne medvirke til at gøre en reel forskel.

Problemformulering og formål

Betydningen af afstanden mellem gødningsgranulaterne for planternes respons på fosforgødningen på et makroskopisk niveau er endnu ikke klarlagt[3]. For at få en bedre forståelse for dette vil jeg i forskerspireprojektet undersøge følgende problemstilling:

Hvordan påvirker diffusionsprocessen af fosforgødningsgranulater koncentrationen af fosfor i jorden, og kan koncentrationen mellem to gødningsgranulater beskrives med superpositionsprincippet for de enkelte koncentrationer?

Formålet med projektet er dermed at forbedre vores viden om diffusion af fosforgødningsgranulater i jord ved at undersøge, om en simpel beskrivelse af den samlede koncentration for to granulater gælder. Dette vil jeg gøre ved først at undersøge og beskrive diffusionsprocessens indflydelse på

[1] (Jeschke, u.d.)
[2] (Allen & Eagar, 2006)
[3] (Scanlan, Malik, Degryse, Van Burgel, & McLaughlin, 2026)

fosforkoncentrationen for et enkelt gødningsgranulat og derefter bruge denne viden til at opstille og teste en mulig beskrivelse af koncentrationen for et sted mellem to granulater.

Afgrænsning

Jordens type og sammensætning har stor indflydelse på jordens egenskaber og på de processer der sker i jorden. Jeg vælger at fokusere på dansk muldjord, der er klassificeret som JB4 jord (Fin lerblandet sandjord), hvilket er den mest udbredte jordtype blandt dansk landbrug[4].

Derudover undersøger jeg også kun med en enkelt type af fosforgødningsgranulater som er TSP[5]. TSP er en af de mest fosforkoncentrerede gødningstyper som almindeligvis bruges i dansk landbrug, hvilket gør den velegnet til undersøgelse af diffusionen af fosfor[6].

Jeg vælger også at holde pH-værdien konstant på 6,5-7, hvilket er der hvor fosfor generelt adsorberes og udfældes mindst, hvilket betyder at fosfortilgængeligheden er højst og kan diffundere mest (se bilag 2).

Med hensyn til det teoretiske fundament ønsker jeg at undersøge superpositionsprincippet for processer, hvor de enkelte koncentrationer fra hvert gødningsgranulat kan beskrives ved diffusionsligningen. Jeg antager altså, at Ficks 2. lov gælder for diffusionsprocessen af fosfor i jord. Dette giver et konkret og simpelt startpunkt, som kan hjælpe til en dybere forståelse og er også blevet bekræftet empirisk[7].

Det bemærkes dog at projektet nemt kan udvides til en undersøgelse af forskellige jordtyper, gødningstyper, pH-værdier osv.

Teori

Fosfor i jorden

Forenklet kan jordens fosfor deles op i tre kategorier:[8]

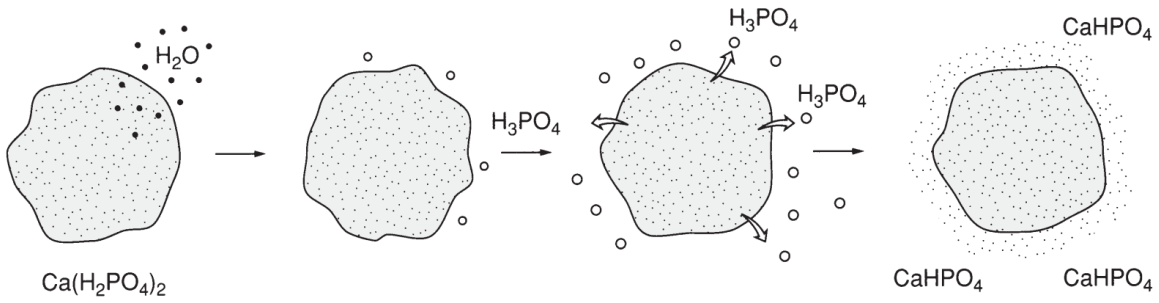
$$Jordvæskens\ fosfor \rightleftharpoons let\ tilgængeligt\ fosfor \rightleftharpoons svært\ tilgængeligt\ fosfor$$

Svært tilgængeligt- og let tilgængeligt fosfor kan planterne ikke optage, mens jordvæskens fosfor direkte kan optages gennem planternes rødder[9]. Jordvæskens fosfor bliver dog begrænset af for eksempel fosforfiksering, der ved overfladeadsorption og udfældningsreaktioner binder fosforen til

[4] (Bjerre, 2024)
[5] TSP står for Triple Superphosphate
[6] (Miljøstyrelsen, 2013)
[7] (McLaughlin & Degryse, 2014)
[8] (Havlin, Beaton, Tisdale, & Nelson, 2005)
[9] (Jeschke, u.d.)

mineraler eller jordpartikler. Derved bliver fosforen omdannet til let- og svært tilgængeligt fosfor og gjort utilgængelig for planteoptagelse[10].

Området omkring fosforgødningsgranulatet kaldes fertosfæren[11]. Når fosforgødningsgranulater kommer i kontakt med fugtig jord, trækkes vandet ind til granulatet og initierer opløsningen, der får fosforet til at bevæge sig ind til den omkringliggende jord og danner en næsten fosformættet zone i og omkring granulatet (se figur 1)



Figur 1: Reaktionen af fosforgødningsgranulater i jord[12].

Fosfor transporteres gennem jorden primært ved diffusion[13], hvor partiklerne bevæger sig fra et sted med højere koncentration til et sted med lavere koncentration på grund af de individuelle molekylers tilfældige bevægelser.

Ficks love for diffusion

Ficks 1. lov siger at diffusionsfluxen er konstant og proportional med partiklens koncentrationsgradient. I en enkelt dimension er det:[14]

$$J(x) = -D\frac{dc(x)}{dx}$$

[10] Det er dog ikke grundstoffet fosfor, der optages gennem planternes rødder, men enten hydrogenfosfat eller dihydrogenfosfat afhængigt af pH-værdien af jorden. Da jeg i dette projekt arbejder med jord der har en pH-værdi på 6,5-7 vil lidt over halvdelen af det tilgængelige fosfor være på dihydrogenfosfatform mens lidt under halvdelen vil være på hydrogenfosfatform (se bilag 3).

[11] Den består af 4 karakteristiske zoner: Den mættede zone, overgangszonen, adsorptionszonen og baggrundszonen. Zonerne afhænger af afstanden til gødningsgranulatets startplacering og fosforkoncentrationen.

[12] (Havlin, Beaton, Tisdale, & Nelson, 2005)

[13] (McLaughlin & Degryse, 2014) (Scanlan, Malik, Degryse, Van Burgel, & McLaughlin, 2026)

[14] (Dickens, u.d.)

Hvor $J(x)$ er diffusionsfluxen[15], D er diffusionskoefficienten, $\frac{dc(x)}{dx}$ er koncentrationsgradienten[16] og $c(x)$ er koncentrationen, som afhænger af stedet x. Den første lov gælder kun i ligevægtstilstanden for et system, dvs. når koncentrationsgradienten er stabil og ikke afhænger af tiden[17].

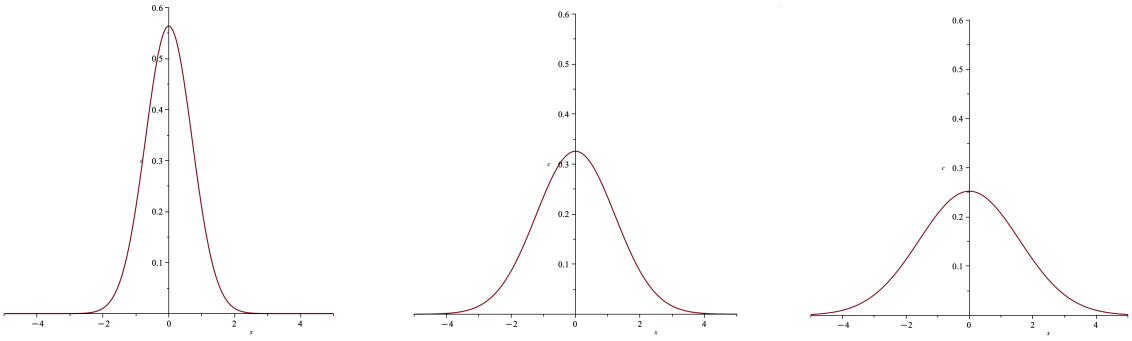
For at overføre dette til en fosforpartikel, der diffunderer i jorden, vil diffusionen dog også afhænge af tiden, fordi det er en dynamisk proces, hvor partiklen og jorden interagerer. Ficks 2. lov beskriver netop denne ændring i koncentrationsgradienten over tid. Det er en partiel differentialligning, som i en enkelt dimension er:[18]

$$\frac{\partial c(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 c(x,t)}{dx^2}$$

Hvor koncentration $c(x,t)$ nu også er en funktion af tiden t. Løsningen til denne partielle differentialligning vil altså beskrive koncentrationen omkring et gødningsgranulat. Den relevante løsning for dette projekt er[19,20]:

$$c(x,t) = \frac{N}{\sqrt{4\pi Dt}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Løsningen bygger på, at ved begyndelsestilstanden (til tiden $t = 0$) sætter man N punktpartikler, som alle er uendelige små, i startstedet ($x = 0$) og de begynder så at sprede sig[21].



Figur 2: Løsningskurverne plottet på maple for hhv. $t = 1$, $t = 3$ og $t = 5$ når $D = \frac{1}{4}$ og $N = 1$ (se bilag 4).

Alle løsningsgrafer har form som en klokkekurve (se figur 2). Ud fra forskriften ses det, at til et bestemt tidsrum svarer denne funktion til normalfordelingen, som har tæthedsfunktionen:[22]

[15] Beskriver hvor hurtigt og hvor meget fosfor, der bevæger sig gennem et bestemt areal som følge af diffusion.
[16] Beskriver forskellen i koncentration over en vis afstand.
[17] (Sadoway, 2010; Allen & Eagar, 2006)
[18] (Dickens, u.d.)
[19] (Allen & Eagar, 2006)
[20] (Bruus, 2006)
[21] (Balluffi, Allen, & Carter, 2005)
[22] (Jacobsen, 2024)

$$f(x) = \frac{N}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Hvor μ er middelværdien og σ er spredningen. Hvis dette sammenlignes med løsningen til diffusionsligningen, kan det ses, at spredningen er $\sigma = \sqrt{2Dt}$ og middelværdien er $\mu = 0$.

Diffusion i tre dimensioner

Tilsvarende gælder for løsningen af diffusionsligningen i tre dimensioner, som er:[23]

$$c(r,t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{r^2}{4Dt}}$$

Hvor r er den radiale afstand fra granulatet. Hvis vi kigger på en lineær diffusionsmodel, hvor diffusionskoefficienten D er konstant forudsiger dette, at superpositionsprincippet gælder for koncentrationerne af to gødningsgranulater. Dette betyder, at den samlede koncentration i et sted mellem de to granulater vil være summen af de to koncentrationer på det pågældende sted og tidspunkt.

Jeg vil undersøge diffusionen af fosfor i den vandrette x-retning fra det ene granulat til det andet. Hvis vi ser på to gødningsgranulater, som placeres i afstanden a, hvor det ene granulat placeres i $x = 0$ mens det andet granulat placeres i $x = a$ vil koncentrationen være:

$$c_{teori}(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x-a,t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}}$$

Hvis dette kan bekræftes eksperimentelt, implicerer det, at både superpositionsprincippet gælder, og at diffusionen kan beskrives ved normalfordelingen til et bestemt tidspunkt. Det bemærkes dog, at der også er en mulighed, hvor diffusionsmodellen ikke kan beskrives ved normalfordelingen, men at superpositionsprincippet stadig gælder.

Metode og projektets udførsel

Måling af koncentration af fosfor i et punkt i jorden

I begge af projektets faser skal koncentrationen af fosfor måles adskillige gange. Jeg vil bestemme koncentrationen af fosfor i jorden i de pågældende steder ved brug af ICP-OES analyse[24]. Dette fungerer ved, at jeg udtager en lille jordprøve med massen $1{,}0g$ i det sted, jeg gerne vil undersøge, hvorefter jeg tilsætter et kendt volumen vand for at ekstrahere det vandopløselige fosfor fra prøven. Fosforen ekstraheres ved brug af et rysteapparat i 1 time, hvorefter jeg filtrerer alle jordpartikler fra ved brug af et filter med porestørrelse på $0{,}45\mu m$. Derefter fungerer ICP-EOS analysen ved, at et plasma med meget høj temperatur exciterer atomerne i prøven, hvorefter de vil emittere lys med

[23] (Balluffi, Allen, & Carter, 2005)

[24] ICP-OES står for Inductively Coupled Plasma – Optical Emission Spectroscopy (optisk emissionsspektroskopi med induktivt koblet plasma)

specifikke bølgelængder. Jeg laver så nogle standardopløsninger med kendt koncentration af fosfor, som tilsammen dækker det forventede koncentrationsområde for fosfor i de ukendte jordprøver. Disse opløsninger skal bruges til at lave en standardkurve, som viser sammenhængen mellem fosforkoncentrationen og intensiteten af det udsendte lys. Koncentrationen af fosfor i de ukendte prøver kan så bestemmes ved sammenligning med standardkurven, da intensiteten af den udsendte stråling er proportional med koncentrationen af fosfor[25].

Overordnet er projektets udførsel opdelt i to dele.

Del 1: Eksperimentel bestemmelse af diffusionskoefficienten D for diffusionen af et enkelt fosforgødningsgranulat.

Jeg antager at:

- Diffusionen af fosfor i jord følger diffusionsligningen med en konstant diffusionskoefficient.
- Virkningen af det fosfor som fjernes ved for eksempel fiksering beskrives under den konstante effektive diffusionskoefficient D.
- Jorden er ensartet.

Som beskrevet tidligere i teorien var løsningen til diffusionsligningen:

$$c(x,t) = \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$$

Hvis man ser på koncentrationen c som funktion af afstanden x til et bestemt fastholdt tidspunkt t, kan dette beskrives som en funktion (se bilag 5):

$$\ln(c) = -k \cdot x^2 + b$$

Jeg måler sammenhørende værdier for koncentrationen af fosfor i jorden til forskellige afstande fra startpunktet ($x = 0{,}5cm$, $x = 1cm$, $x = 1{,}5cm$, $x = 2cm$ og $x = 2{,}5cm$) til et bestemt tidspunkt efter gødningsgranulatet bliver placeret ($t = 1\ uge$).

Hvis jeg så plotter $\ln(c)$ som funktion af x^2 og laver lineær regression, kan den effektive diffusionskoefficient D og antallet af punktpartikler N findes ud fra hældningen k og skæringen med y-aksen b (se bilag 6).

Det samme gør jeg til flere fastholdt tidspunkter ($14\ dage$, $21\ dage$, $28\ dage$ og $35\ dage$). Jeg tager så middelværdien af de fundne effektive diffusionskoefficienter og middelværdien af N og bruger disse som værdier til næste del.

[25] (An Introduction to the Principles of Inductively Coupled Plasma – Optical Emission Spectroscopy (ICP-OES) , u.d.)

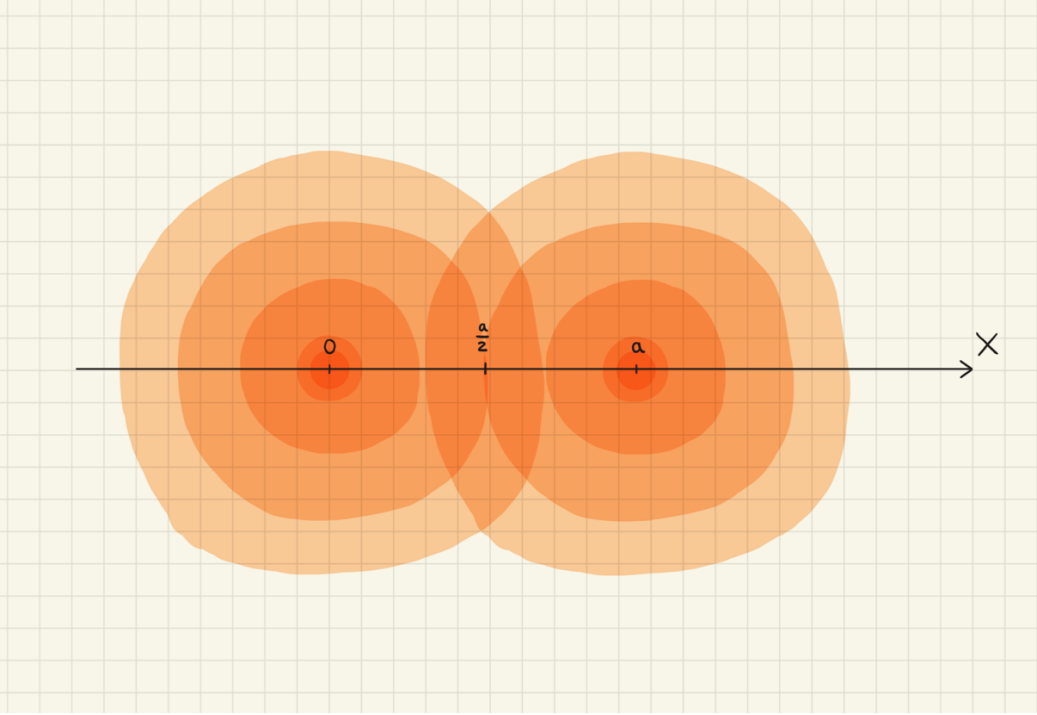
Del 2: Undersøgelse af superpositionsprincippet for koncentrationen af fosfor for to gødningsgranulater

Jeg placerer to fosforgødningsgranulater i afstanden a væk fra hinanden, hvor det første granulat placeres i $x = 0$ og det andet i $x = a$. Ud fra løsningkurven til diffusionsligningen så vi, at til ethvert bestemt tidspunkt vil koncentrationen som funktion af afstanden svare til en normalfordeling med en spredning på $\sqrt{2Dt}$.

Da jeg placerer de to gødningsgranulater på samme tidspunkt i jorden i afstanden a væk fra hinanden ved jeg, at koncentrationen fra diffusionen af hvert granulat vil være lige stor når de mødes halvvejs (i punktet $\frac{a}{2}$). Jeg vælger, at jeg gerne vil teste superpositionsprincippet i dette punkt til det tidspunkt t_s, hvor hver af de to granulaters spredning er præcis $\frac{a}{2}$, da jeg vurderer, at koncentrationen af fosfor er for ubetydelig i regioner uden for spredningen (se figur 3). Ud fra a og D kan tidspunktet findes (se bilag 7):

$$t_s = \frac{a^2}{8D}$$

Til dette tidspunkt måler jeg koncentrationen i afstanden $x = \frac{a}{2}$.



Figur 3: Visualisering af diffusionsprocessen for to granulater. Den mest gennemsigtige del af diffusionssfæren symboliserer den region udenfor spredningen, hvor jeg vurderer at koncentrationen bliver ubetydelig.

Jeg har nu en målt værdi for koncentrationen af fosfor for et punkt mellem to diffusionssfærer og vil nu sammenligne med den teoretiske koncentration:

$$c_{teori}(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x-a,t)$$

I det tilsvarende sted og tidspunkt som den målte koncentration vil dette være (se bilag 8):

$$c_{teori}\left(\frac{a}{2}, t_s\right) = \frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2e^{-\frac{a^2}{16Dt_s}}$$

Jeg tager differensen mellem den naturlige logaritme af de to koncentrationer (se bilag 9):

$$\ln\left(c_{målt}\left(\frac{a}{2}, t_s\right)\right) - \ln\left(c_{teori}\left(\frac{a}{2}, t_s\right)\right) = \ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln(2) + \frac{1}{2}$$

Hvor f er en funktion af afstanden som opfylder at $c_{målt}(x,t_s) = \frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot f(x)$. Hvis superpositionsprincippet gælder er $c_{målt} = c_{teori}$ og så burde denne ligning give 0, og dermed $\ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2} + \ln(2)$.

Hvis $\ln(c_{målt}) - \ln(c_{teori}) > 0$ er koncentrationen større end de to koncentrationer adderet sammen og hvis $\ln(c_{målt}) - \ln(c_{teori}) < 0$ er de mindre tilsammen.

Dette undersøger jeg for forskellige værdier af afstanden a mellem to gødningsgranulater ($a = 1cm, a = 2cm, a = 3cm, a = 4cm\ og\ a = 5cm$) og de tilsvarende beregnede tidspunkter. På baggrund af disse målinger vil jeg kunne konkludere om superpositionsprincippet gælder for koncentrationen af to gødningsgranulater i de pågældende afstande under disse forudsætninger.

Det bemærkes, at hvis resultaterne ikke påviser superpositionsprincippet ud fra diffusionsmodellen, kan den sidste mulighed for, at superpositionsprincippet gælder, testes ved at måle koncentrationen c_1 for et enkelt granulat i den samme afstand $\frac{a}{2}$ væk fra granulatet og til det samme tidspunkt t_s og sammenligne med den tilsvarende værdi c_{total} for to granulater:

$$c_{total} = 2 \cdot c_1 - c_{baggrund}$$

Hvor $c_{baggrund}$ er baggrundskoncentration af fosfor i jorden, som måles inden placering af granulater.

Tidsramme og budget

Projektet forventes at kunne udføres på i alt 10-15 uger. Den første del forventes at tage 5 uger, da tiden imellem hver målingsrunde er 7 dage. Anden del forventes at tage omkring 5-10 uger, men den præcise tid afhænger af den fundne værdi af diffusionskonstanten i første del. I disse uger vil der blive foretaget målinger løbende når granulaternes spredning er præcis $\frac{a}{2}$ for de forskellige værdier af afstanden a.

Til måling af koncentrationen af fosfor i jordekstraheringerne vil jeg bruge ICP-OES analysemetoden, hvilket jeg har undersøgt at KU råder over. Som det kan ses på tabellen herunder,

er der en betydelig del af de 20.000 kr. i budgettet tilbage som vil bruges til betaling af lån til KU for brug af ICP-OES apparat, omkostninger til dataanalyse og andre uventede omkostninger.

Materiale	Pris i DKK	Reference
Harpet muldjord	1295	https://maxibag.dk/plantejord/muldjord/muldjord-340
TSP-gødningsgranulater	203	https://gardenseedsmarket.com/triple-superphosphate-ogrod-start-5-kg-da.html?srsltid=AU7gw4Uk97G9XdpftNk750eZl11kHIXqyEzYJ_lGebKRMUubyS-MjhRO
Orbitalt rysteapparat (til ekstraktion)	3201	https://cdon.dk/produkt/laboratorie-orbital-ryster-justerbar-hastighed-40-200-omdr-min-dc-borstelos-motor-os-20pro-eu-stik-ff68e8bd25775b30/
Sprøjtefiltre (porestørrelse på $0{,}45\mu m$)	890	https://www.lekolar.dk/sortiment/indlaring/biologi/laboratorieudstyr/sprojefilter-nylon-100-stk/
Laberatoriesprøjter som passer til filtrene	340	https://www.lekolar.dk/sortiment/indlaring/fysik/tilbehor-til-fysik/sprojte-20-ml-10-stk/
Fosforstandard til ICP	916	https://www.sigmaaldrich.com/DK/en/product/sial/38338?utm_source=google&utm_medium=cpc&utm_campaign=8693984816&utm_content=91025025761&gad_source=1&gad_campaignid=8693984816&gbraid=0AAAAD8kLQTMQgDF7ZvlAubnjyMDhpplj&gclid=CjwKCAjw88HWBhA3EiwAo2Zd6Hd94xhnQvMYsbVlDQly2iG9BfsUUqVkHe1AT9GTcexBHCUaFnG8yxoCKOQQAvD_BwE
Målekolber	315	https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/maalekolbe-100-ml-pp-prop-borosil-class-b/010710
Bægerglas	100	https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/baegerglas-lav-form-25-ml-borosil/007400

Petriskåle	450	https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/petriskaal-plast-oe150-x-20-mm-steril/016620
Mikropipette	595	https://www.frederiksen-scientific.dk/produkt/mikropipette-oekonomi-1-5-ml/013409
Præcisionsvægt	Lånes af KU/mit gymnasium	
ICP-OES apparat	Lånes af KU	https://ign.ku.dk/laboratorier/kemisk-fysiske-analyser-jord-sedimenter-vand-planter-luft/laboratoriet-til-kemiske-analyser-af-jord-sedimenter-vand--planter/
I alt	8305	

Konklusion

Ud fra projektet forventer jeg at blive klogere på, hvordan koncentrationen af fosfor i jord påvirkes af diffusion og om superpositionsprincippet kan beskrive koncentrationen mellem to fosforgranulater, hvis det er forudsat at diffusionsprocessen kan beskrives ved diffusionsligningen.

Hvis resultaterne ikke indikerer at superpositionsprincippet gælder, vil teorien være afkræftet og man kan påbegynde forskning i andre hypoteser og teorier. Hvis resultaterne bekræfter superpositionsprincippet, vil det næste skridt være en yderligere forskning af andre jordtyper, gødningstyper, pH-værdier osv. Denne viden ville direkte kunne udnyttes i praksis til at effektivisere brugen af fosforgødning i blandt andet landbrugssektoren.

Uanset hvad vil resultaterne kunne hjælpe til en dybere forståelse af diffusionen og koncentrationen af fosfor i jord og kunne give viden, som kan benyttes til videre forskning og i sidste ende til optimering af placering af fosforgødningsgranulater. Dette kan have en betydelig gavnlig effekt på planter og afgrøder og vil potentielt kunne forbedre adskillige processer og formindske overgødning, som både skader økonomien og miljøet.

Tak

Tusind tak til mine to forskerkontakter Emil Have, postdoc i teoretisk fysik ved Oxford universitet og Niels Obers, professor i teoretisk fysik ved Københavns Universitet for jeres vejledning, sparring og inspiration under hele projektet. Derudover vil jeg gerne takke min forskerspirekoordinator Kasper Laust og de øvrige forskerspiredeltagere for den store motivation og lyst til at undersøge og være nysgerrig.

Litteraturliste

Allen, S., & Eagar, T. (2006). *Thermodynamics and Kinetics of Materials*. Hämtat från OpenCourseWare: https://ocw.mit.edu/courses/3-205-thermodynamics-and-kinetics-of-materials-fall-2006/resources/lecture03_slides/

An Introduction to the Principles of Inductively Coupled Plasma – Optical Emission Spectroscopy (ICP-OES) . (u.d.). Hämtat från agilent.com: https://www.agilent.com/en/support/atomic-spectroscopy/inductively-coupled-plasma-optical-emission-spectroscopy-icp-oes/icp-oes-faq?srsltid=AU7gw4Wm31-B6WK-R3kGrDQ4yv9-NtxcXYpbdyGqNffR9sQsKgL4e2fF

Balluffi, R. W., Allen, S. M., & Carter, W. (2005). *Kinetics of materials*. Wiley-interscience.

Bjerre, M. (2024). *Forskere fra AU står bag opdateret jordbundstypekort*. Hämtat från agro.au.dk: https://agro.au.dk/aktuelt/nyheder/vis/artikel/forskere-fra-au-staar-bag-opdateret-jordbundstypekort

Bruus, H. (2006). *Theoretical microfluidics*. DTU.

Dickens, L. (u.d.). *Diffusion*. Hämtat från libretexts.org: https://chem.libretexts.org/Bookshelves/Physical_and_Theoretical_Chemistry_Textbook_Maps/Supplemental_Modules_%28Physical_and_Theoretical_Chemistry%29/Kinetics/09%3A_Diffusion

Havlin, J. L., Beaton, J. D., Tisdale, S. L., & Nelson, W. L. (2005). *Soil Fertility and Fertilizers*. Upper Saddle River, New Jersey: Pearson.

Jacobsen, M. (2024). *normalfordeling*. Hämtat från lex.dk: https://lex.dk/normalfordeling

Jeschke, M. (u.d.). *Phosphorus Behavior in Soil*. Hämtat från Pioneer.com: https://www.pioneer.com/us/agronomy/phosphorus-soil.html

Mckenna, B. A., Lombi, E., McLaren, T. I., Doolette, C. L., Raymond, N. S., & Kopittke, P. M. (2025). Spatially-resolved characterisation of phosphate fertiliser reaction zones for sustainable soil management. *Geoderma, 463*.

McLaughlin, M. J., & Degryse, F. (2014). Phosphorus Diffusion from Fertilizer: Visualization, Chemical Measurements, and Modeling. *Soil Science Society of America Journal, 78*(3), 832-842.

Miljøstyrelsen. (2013). *Innovationspartnerskab for anvendelse af fosfor fra spildevand og spildevandsslam fra spildevandsforsyninger*. København: Miljøstyrelsen.

Sadoway, D. (2010). *Introduction to Solid State Chemistry*. Hämtat från OpenCourseWare: https://live.ocw.mit.edu/courses/3-091sc-introduction-to-solid-state-chemistry-fall-2010/pages/reactions-and-kinetics/24-diffusion/

Scanlan, C. A., Malik, R., Degryse, F., Van Burgel, A., & McLaughlin, M. J. (2026). Ammonium phosphate fertilizers are a more effective phosphorus source than superphosphate for wheat grown on acidic gravelly soils. *Soil Science Society of America Journal, 90*(4).

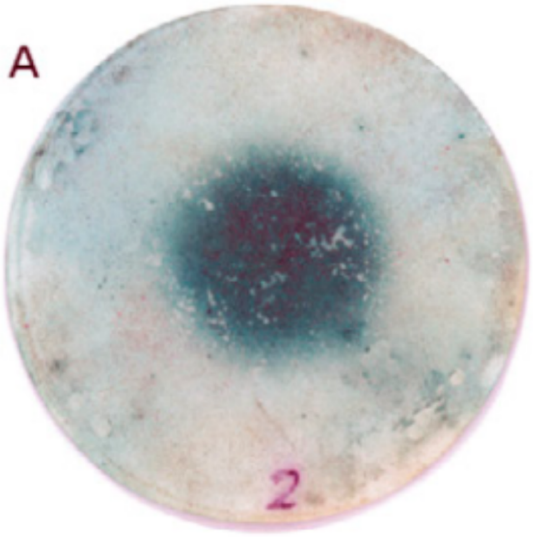
USDA. (2021). *Phosphoric Acid* . USDA National Organic Program.

Wikipedia. (u.d.). *Fick's laws of diffusion*. Hämtat från Wikipedia.org: https://en.wikipedia.org/wiki/Fick%27s_laws_of_diffusion#Invalidity_of_Fickian_diffusion

Wikipedia. (u.d.). *Superposition principle*. Hämtat från Wikipedia.org: https://en.wikipedia.org/wiki/Superposition_principle

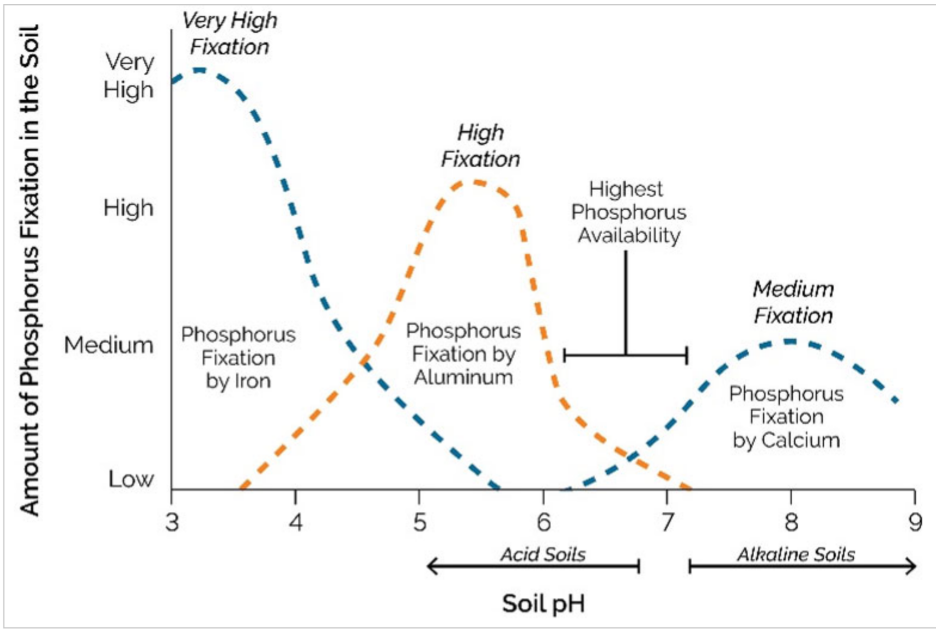
Bilag

Bilag 1: Visualisering af fosfordiffusionszoner i jord[26] (forside)



Link: https://acsess.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.2136/sssaj2013.07.0293

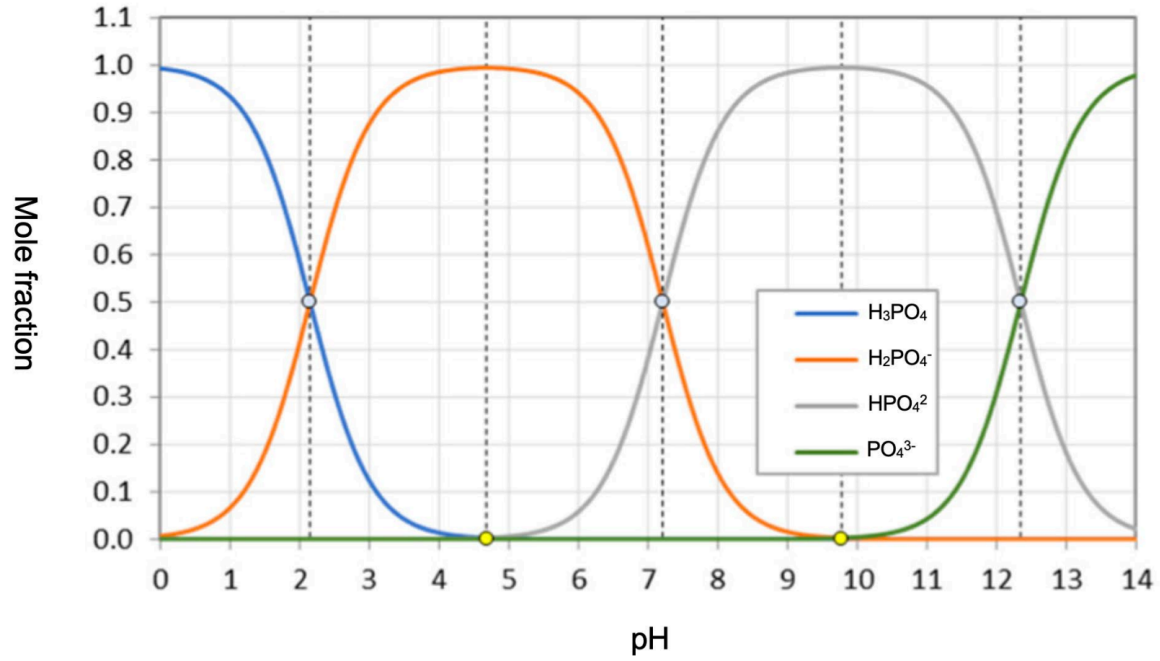
Bilag 2: pH-værdiens indflydelse på fosforfiksering



Link: https://www.pioneer.com/us/agronomy/phosphorus-soil.html

[26] (McLaughlin & Degryse, 2014)

Bilag 3: pH-værdiens indflydelse på fordelingen af fosfatformer i opløsning[27]



Link:
https://www.ams.usda.gov/sites/default/files/media/USDAHandlingPhosphoricAcid.pdf?utm_source

[27] (USDA, 2021)

Bilag 4: Input til grafer i maple.

Jeg fastsatte funktionen og nogle værdier for D og N:

$$c(x,t) := \frac{N}{\sqrt{4\cdot\pi\cdot \mathrm{D}\cdot t}}\cdot \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{4\cdot \mathrm{D}\cdot t}} = (x,t)\rightarrow \frac{N\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\,\frac{x^2}{\mathrm{D}\,t}}}{\sqrt{4\,\pi\,\mathrm{D}\,t}}$$

$$\mathrm{D} := \frac{1}{4}:$$

$$N := 1:$$

Til den første graf:

$$plot(c(x,1), x=-5..5, c=0..0.6)$$

Til den anden graf:

$$plot(c(x,3), x=-5..5, c=0..0.6)$$

Til den tredje graf:

$$plot(c(x,3), x=-5..5, c=0..0.6)$$

Bilag 5: Udregning af lineær sammenhæng for koncentrationen og afstanden for et fast tidspunkt.

$$c(x,t_0) = \frac{N}{(4\pi D t_0)^{\frac{3}{2}}}\cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt_0}} \Leftrightarrow$$

$$\ln(c) = \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_0)^{\frac{3}{2}}}\right) - \frac{x^2}{4Dt_0} \Leftrightarrow$$

$$\ln(c) = -\frac{1}{4\cdot D\cdot t_0}\cdot \mathrm{x}^2 + \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_0)^{\frac{3}{2}}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\ln(c) = -k\cdot x^2 + b$$

Hvor $k = \frac{1}{4\cdot D\cdot t_0}$ og $b = \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_0)^{\frac{3}{2}}}\right)$

Bilag 6: Udregning af D og N ud fra k og b.

$$k = \frac{1}{4 \cdot D \cdot t} \Leftrightarrow$$

$$D = \frac{1}{4 \cdot k \cdot t}$$

$$b = \ln\left(\frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}}\right) \Leftrightarrow$$

$$e^b = \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$N = e^b \cdot (4\pi Dt)^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$$

$$N = e^b \cdot \left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Bilag 7: Udregning af udtryk for tiden for måling af undersøgelse for superpositionsprincip

$$\frac{a}{2} = \sqrt{2Dt_s} \Leftrightarrow$$

$$t_s = \frac{a^2}{8D}$$

Bilag 8: Udregning af udtryk for den teoretiske koncentration ud fra superpositionsprincippet

$$c_{teori}(x,t) = c_1(x,t) + c_2(x-a,t) =$$

$$\frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + \frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}} =$$

$$\frac{N}{(4\pi Dt)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(e^{-\frac{x^2}{4Dt}} + e^{-\frac{(x-a)^2}{4Dt}}\right)$$

Da vi måler til et specifikt tidspunkt t_s og bruger præcis de samme gødningsgranulater er N og faktoren $\frac{N}{(4\pi Dt_s)^{\frac{3}{2}}}$ ens for både c_1 og c_2.

For $x = \frac{a}{2}$ og $t = t_s$:

$$c_{teori}\left(\frac{a}{2}, t_s\right) = \frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot \left(e^{-\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4Dt_s}} + e^{-\frac{\left(\frac{a}{2}-a\right)^2}{4Dt_s}} \right) =$$

$$\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2e^{-\frac{\frac{a^2}{4}}{4Dt_s}} =$$

$$\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2e^{-\frac{a^2}{16Dt_s}}$$

Bilag 9: Udregning af udtryk til sammenligning af den målte og teoretiske koncentration

Den målte koncentration til tidspunktet t_s kan udtrykkes så den har funktionsforskriften: $c_{målt}(x, t_s) = \frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot f(x)$, hvor $f(x)$ er en eller anden funktion af afstanden x. Der gælder derfor at:

$$\ln\big(c_{målt}(x, t_s)\big) = \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}}\right) + \ln\big(f(x)\big)$$

For at sammenligne tager jeg differensen mellem den naturlige logaritme af den målte og teoretiske koncentration.

$$\ln\left(c_{målt}\left(\frac{a}{2}, t_s\right)\right) - \ln\left(c_{teori}\left(\frac{a}{2}, t_s\right)\right) =$$

$$\ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}}\right) + \ln\big(f(x)\big) - \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}} \cdot 2e^{-\frac{a^2}{16Dt_s}}\right) =$$

$$\ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}}\right) + \ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln\left(\frac{N}{(4\pi D t_s)^{\frac{3}{2}}}\right) - \ln\left(2e^{-\frac{a^2}{16Dt_s}}\right) =$$

$$\ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln(2) + \frac{a^2}{16Dt_s}$$

Jeg bruger nu at:

$$\frac{a}{2} = \sqrt{2Dt_s} \Leftrightarrow a = 2\sqrt{2Dt_s}$$

Dette kan jeg indsætte i ligningen:

$$\ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln(2) + \frac{a^2}{16Dt_s} = \ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln(2) + \frac{\left(2\sqrt{2Dt_s}\right)^2}{16Dt_s} = \ln\left(f\left(\frac{a}{2}\right)\right) - \ln(2) + \frac{1}{2}$$